
Esercizio 2. Calcolare il limite puntuale su $[0, +\infty)$ di

$$f_n(x) = 1 + n \sin \left(\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \right).$$

Il limite è anche uniforme?

Svolgimento. Convergenza puntuale. Si osservi che per ogni $x \geq 0$ si ha

$$\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

quindi, ricordando che $\sin(z) \sim z$ per $z \rightarrow 0$, abbiamo

$$\sin \left(\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \right) \sim \frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2}$$

e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} = 0.$$

Dunque

$$f_n \rightarrow 1 \quad \text{puntualmente.}$$

♣ **Strategia generale** per provare che

f_n NON converge uniformemente al limite puntuale f su I

- mostrare che esiste una successione $\{x_n\} \subset I$ tale che

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

- Allora non può esserci convergenza uniforme su I , perché si ha

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0!$$

♣ Studio della Convergenza uniforme. Mostriamo che la convergenza di $\{f_n\}$ non è uniforme. Consideriamo i punti x_n tali che

$$(2) \quad \sin \left(\frac{x_n \arctan(x_n) \ln(x_n^2 + 1)}{n^2} \right) = 1.$$

Per questi punti si ha

$$f_n(x_n) - 1 = 1 + n - 1 = n \rightarrow +\infty$$

e dunque

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |f_n(x) - 1| \geq |f_n(x_n) - 1| = n \rightarrow +\infty.$$

Per ottenere la (2), possiamo ad esempio cercare punti x_n che soddisfino

$$(3) \quad x_n \arctan(x_n) \ln(x_n^2 + 1) = \frac{\pi}{2} n^2 \quad \forall n \geq 1.$$

L'esistenza di una successione $\{x_n\}$ per la quale valga la (3) è garantita dal teorema dei valori intermedi, in quanto la funzione continua

$$g(x) = x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)$$

è tale che $g(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Quindi per ogni $n \geq 1$ esiste x_n con $g(x_n) = \frac{\pi}{2} n^2$.
